西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

函数、极限、连续

自动化83 王琨

2019年12月29日

CONTENS

1.求解极限的常用方法

①初等变形法（如积化和差、裂项相消、变量代换等）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[cos\frac{\pi}{4n}+cos\frac{3\pi}{4n}+\ldots+cos\frac{(2n-1)\pi}{4n}\right]$$

②利用两个重要极限及等价无穷小计算

(1)两个重要极限的等价形式：

$$\lim_{f(x)\to 0}\frac{sinf(x)}{f(x)}=1 \qquad \lim_{f(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$$

(2)等价无穷小替换定理：

设$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，则$lim\frac{\beta}{\alpha}=lim\frac{\beta'}{\alpha'}$

(3)几个常用的等价无穷小：当$x\to 0$时，有

$x\sim sinx\sim arcsinx\sim tanx\sim acrtanx\sim ln(1+x)\sim e^x-1$，

$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$，$1-cosx\sim\frac{1}{2}x^2$

注：

1）若极限式中含幂指函数$f(x)^{g(x)}$，常用换底公式$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)lnf(x)}$来处理

2）应用无穷小等价代换求极限时，只能对待求极限函数中的无穷小因式进行。

如：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tanx-sinx}{x^3} \neq \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}$

正确解法：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tanx-sinx}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{tanx(1-cosx)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3} = \frac{1}{2}$

③ 利用微分或积分中值定理计算

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1} x^2e^{-x^2}dx = \lim_{n\to\infty}\xi^2e^{-\xi^2}\cdot(n+1-n)$$

$$= \lim_{\xi\to\infty}\frac{\xi^2}{e^{\xi^2}} = 0 \qquad (n \leq \xi \leq n+1)$$

1.求解极限的常用方法

$$\text{注：定积分形式极限}\begin{cases}\text{利用积分中值定理去积分符号}\\ \text{先求解该定积分再取极限}\\ \text{对被积函数放缩结合夹逼准则}\end{cases}$$

利用微分中值定理求极限（自行思考）：

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(arctan\frac{a}{n} - arctan\frac{a}{n+1}\right)$$

(提示：对$f(x)=\arctan ax$在$\left[\frac{1}{n},\frac{1}{n+1}\right]$上应用拉格朗日公式)

当极限式中含有某一函数的增量时，可考虑用微分中值定理。

④ 利用定积分的定义、导数的定义计算

⑤ 利用夹逼准则、单调有界准则求解

1.求解极限的常用方法

数列的单调性判断
- 差值法
- 比值法
- 利用导数研究
- 数学归纳法

注：求数列极限时无需从第一项开始便保持单调，从第n项即可

⑥ 利用洛必达法则计算

主要用于解决$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型的极限问题

$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，1^{∞}，∞^{0}，$0^{0}\rightarrow\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$

注：要注意课本上提到的洛必达法则使用的前提条件

错误解法：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x+x}{x}\rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\sin x+x)'}{x'}\rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos x+1}{1}$

判断数列收敛性以及求解数列、函数极限的其他方法：

$Taylor$公式（皮亚诺余项）

利用数列、函数极限的定义

利用$Cauchy$收敛原理

利用数列极限的归并原理以及函数极限的归并原理（$Heine$定理）

比较适合判断极限不存在，如：

证明：$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$不存在（教材P49）

推论：数列收敛的充要条件是由它的奇数项与偶数项分别组成的两个子数列收敛于同一个常数a。

施笃兹($Stolz$)定理:被称之数列极限的洛必达法则，感兴趣的同学可以自行了解

对于收敛数列而言：

① 唯一性

② 有界性

③ 保号性（注意书上定理的逆否命题）

④ 保序性

⑤ 夹逼性

对于函数极限而言：

其性质类似于收敛数列，只不过其有界性、保号性、保序性均是局部的。

3.连续函数

判断函数在一点处是否连续：

根据定义判断：

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

或

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

函数f在x_0处连续$\Leftrightarrow$$f$在$x_0$处既左连续又右连续

间断点分类

- 第一类间断点
  - 可去间断点
  - 跳跃间断点
- 第二类间断点
  - 无穷间断点
  - 振荡间断点
  - …

闭区间上连续函数的性质：

有界性

最值定理

零点存在定理

介值定理（注意其两种描述形式）：

一是闭区间两端点值之间，二是闭区间上最大值最小值之间

一定要注意其使用的条件：闭区间、连续

拓展知识：

$Darboux$定理：设函数f在闭区间[a,b]上可导，$f'_+(a) \neq f'_-(b)$,μ为介于$f'_+(a)$与$f'_-(b)$之间的任意一个数，则至少存在一个点$\xi\epsilon(a,b)$，使得$f'(\xi) = \mu$。

1.$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\,(x>0)$，求$f(x)$的显示表达式。

分析：联想到已掌握的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n}$ （夹逼准则）

$$\sqrt[n]{3^n}\le\sqrt[n]{1+2^n+3^n}\le\sqrt[n]{3\cdot 3^n}=3\cdot\sqrt[n]{3}$$

解：由夹逼准则可得：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}=max\{a,b,c\}\ \ (a,b,c>0)$$

所以

$$f(x)=\max_{(0,+\infty)}\left\{1,x,\frac{x^2}{2}\right\}=\begin{cases}1\ , & 0<x\le 1\\ x\ , & 1<x\le 2\\ \frac{x^2}{2}\ , & x>2\end{cases}$$

$$2.\lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots\underbrace{\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}}_{n\text{重}}$$

猜想：与 $\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n\text{重}}=2$ 有关?

解：

二倍角公式：$\cos 2\theta = 2cos^2\theta - 1$

$$cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}},\quad \theta\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\cos\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

则由归纳法可知：

$$cos\frac{\pi}{2^{n+1}}=\underbrace{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}{2}}_{n\text{重}},\quad n\geq 1$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots\underbrace{\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}}_{n\text{重}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{cos\frac{\pi}{4}\cdot cos\frac{\pi}{8}\cdots cos\frac{\pi}{2^n}}$$

可先考虑极限：

$$\lim_{n\to\infty}cos\frac{\pi}{4}\cdot cos\frac{\pi}{8}\cdots cos\frac{\pi}{2^n}$$

4.练习题精讲

$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}\cdot\cos\frac{\pi}{2^n}\cdots\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{2^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2^{n-1}\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}\cdot\frac{\pi}{2^n}}=\frac{2}{\pi}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots\frac{2}{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n\text{重}}}=\frac{\pi}{2}$$

3.$f \in C[0,n]$ $(n\epsilon N^+)$，$f(0)=f(n)$。求证：$\exists\xi\epsilon[0,n]$,使得$f(\xi)=f(\xi-1)$。

解:

令 $F(x)=f(x)-f(x-1)$

则有

$$F(1)=f(1)-f(0)$$
$$F(2)=f(2)-f(1)$$
$$\ldots$$
$$F(n)=f(n)-f(n-1)$$

$\therefore$ $F(1)+F(2)+\ldots+F(n)=f(n)-f(0)=0$

① 若$\exists k\epsilon[0,n]\cap Z$，使得 $F(k)=0$，则满足所证;

② 若不存在，即对$\forall k \epsilon [0,n] \cap Z, F(k) \neq 0$

则必有

$$\exists m \epsilon [0, n-1] \cap Z\text{，使得}F(m) > 0\text{且}F(m+1) < 0$$

根据零点存在定理知：

$$\exists \xi \epsilon (m, m+1)\text{，使得}F(\xi) = 0$$

此时亦满足所证。

综合①②可知：

$$\exists \xi \epsilon [0, n]\text{,使得}f(\xi) = f(\xi - 1)$$

思考题：（大家可在期末考试结束后思考一下此问题）

无穷多个无穷小相乘为什么不一定是无穷小？

祝大家取得满意成绩！